1. CONGRUÊNCIAS LINEARES E PROGRESSÕES ARITMÉTICAS

Suponhamos que já conhecemos as propriedades de congruências lineares.

FATOS QUE AJUDAM 1. O termo geral b_n de uma $P.A$, cujo primeiro termo é b_1 e razão r é

$$b_n = b_1 + (n-1)\cdot r$$

FATOS QUE AJUDAM 2. A soma dos n primeiros termos da $P.A$ é

$$S_n = \frac{(b_1 + b_n)\cdot n}{2}$$

EXERCÍCIO 1. Para n natural positivo, o número O_n é definido como a soma dos n primeiros termos da progressão aritmética de razão 6, iniciada em 1. Dos 2024 primeiros números O_n, quantos apresentam resto 1 na divisão por 8?

Solução. O temo geral da $P.A$ de termo inicial $b_1 = 1$ e razão $r = 6$ é

$$b_n = 1 + (n-1)\cdot 6$$

ou seja,

$$b_n = 6n - 5$$

daí, temos que

$$O_n = \frac{(b_1 + b_n)\cdot n}{2}$$

substituindo os valores conhecidos, vem

$$O_n = \frac{(1 + 6n - 5)\cdot n}{2} \Longrightarrow O_n = \frac{(6n-4)\cdot n}{2}$$

Simplificando,

$$O_n = (3n-2)\cdot n.$$

Precisamos determinar $n \in \mathbb{N}$, tais que

$$O_n \equiv 1 \pmod 8$$

temos que

$$n(3n-2) \equiv 1 \pmod 8$$

multiplicando essa congruência por 3, vem

$$3 \cdot n(3n-2) \equiv 1 \cdot 3 \pmod 8 \iff n(9n-6) \equiv 3 \pmod 8$$

como $9n \equiv n \pmod 8$ e $-6 \equiv 2 \pmod 8$, temos

$$n(n+2) \equiv 3 \pmod 8$$

Vamos agora analisar os possíveis restos de n por 8. Temos que

- $n \equiv 0 \pmod 8 \Longrightarrow n(n+2) \equiv 0(0+2) = 0 \pmod 8$ **Não serve**
- $n \equiv 1 \pmod 8 \Longrightarrow n(n+2) \equiv 1(1+2) = 3 \pmod 8$ **Serve**
- $n \equiv 2 \pmod 8 \Longrightarrow n(n+2) \equiv 2(2+2) = 8 \equiv 0 \pmod 8$ **Não serve**
- $n \equiv 3 \pmod 8 \Longrightarrow n(n+2) \equiv 3(3+2) = 15 \equiv 7 \pmod 8$ **Não serve**
- $n \equiv 4 \pmod 8 \Longrightarrow n(n+2) \equiv 4(4+2) = 24 \equiv 0 \pmod 8$ **Não serve**
- $n \equiv 5 \pmod 8 \Longrightarrow n(n+2) \equiv 5(5+2) = 35 \equiv 3 \pmod 8$ **Serve**
- $n \equiv 6 \pmod 8 \Longrightarrow n(n+2) \equiv 6(6+2) = 48 \equiv 0 \pmod 8$ **Não serve**
- $n \equiv 7 \pmod 8 \Longrightarrow n(n+2) \equiv 7(7+2) \equiv 7 \pmod 8$ **Não serve**

Ademais,

$$n \equiv 1 \pmod 8 \text{ ou } n \equiv 5 \pmod 8$$

ou equivalentemente,

$$n = 1 + 8k \text{ ou } n = 5 + 8k \text{ com } k \in \mathbb{Z}$$

Pelo enunciado, devemos ter

$$0 \leqslant 1 + 8k \leqslant 2024 \Longrightarrow 0 \leqslant k \leqslant 253$$

ou seja, uma quantidade igual a 254 números que deixam resto 1 na divisão por 8.

Além disso,

$$0 \leqslant 5 + 8k \leqslant 2024 \Longrightarrow 0 \leqslant k \leqslant 252$$

nesse caso, há 253 números.

Portanto, o total de números tais que $O_n \equiv 1 \pmod 8$, com $1 \leqslant n \leqslant 2024$ é $252 + 253 = 507$ números. $\square$

Em breve lançaremos cursos para o ENA -2026 e ENQ - 2025.2

Grupo ENA - 2026

Grupo ENQ - 2025.2

Inscrevam-se em nosso canal no youtube através do Qrcod