1. Indução

Fatos que Ajudam 1.

$$a \mid b \iff a = bq \;\; \textit{com}\; q \in \mathbb{Z}$$

Fatos que Ajudam 2. Seja $P(n)$ uma propriedade do número natural n. Se

- $P(1)$ é verdadeira;
- $P(n) \implies P(n+1)$

Então, a proposição é verdadeira para todo $n \in \mathbb{N}$.

Exercício 1. Prove que, para qualquer número natural n:

(e) $2^{3^n} + 1$ é divisível por 3^{n+1}

Demonstração. De fato, seja $P(n)$: $2^{3^n} + 1$ é divisível por 3^{n+1} $\forall n \in \mathbb{N}$ a proposição a ser provada.
$P(1)$: Temos que a proposição é verdadeira para $n = 1$, pois

$$2^{3^1} + 1 = 2^3 + 1 = 9 \implies 3^{1+1} = 9 \mid 2^{3^1} + 1 = 9.$$

$P(k)$: Suponhamos que a proposição seja verdadeira para algum $n = k$, isto é, existe $q \in \mathbb{N}$, tal que

$$2^{3^k} + 1 = q \cdot 3^{k+1} \iff 2^{3^k} = q \cdot 3^{k+1} - 1$$

$P(k+1)$: Vamos mostrar que a proposição é verdadeira para $n = k+1$. Temos que

$$2^{3^{k+1}} + 1 = 2^{3^k \cdot 3} + 1$$

ou seja,

$$2^{3^{k+1}} + 1 = \left(2^{3^k}\right)^3 + 1$$

pela hipótese de indução, temos

$$2^{3^{k+1}} + 1 = \left(q \cdot 3^{k+1} - 1\right)^3 + 1$$

afim de simplificar os cálculos, façamos $b = 3^{k+1}$, daí

$$2^{3^{k+1}} + 1 = (qb - 1)^3 + 1$$

ou equivalentemente,

$$2^{3^{k+1}} + 1 = (qb)^3 - 3(bq)^2 + 3bq - 1 + 1$$

ou seja,

$$2^{3^{k+1}} + 1 = q^3b^3 - 3b^2q^2 + 3bq$$

substituindo b, temos

$$2^{3^{k+1}} + 1 = q^3 \cdot (3^{k+1})^3 - 3\left(3^{k+1}\right)^2 q^2 + 3^{k+2} \cdot q$$

Observe que 3^{k+2} divide cada uma das parcelas do lado direito da expressão acima. Logo existe $r \in \mathbb{N}$, tal que

$$q^3 \cdot (3^{k+1})^3 - 3\left(3^{k+1}\right)^2 q^2 + 3\left(3^{k+1}\right) q = 3^{k+2} \cdot r.$$

Ademais,

$$2^{3^{k+1}} + 1 = 3^{k+2} \cdot r \Longrightarrow 3^{k+2} \mid 2^{3^{k+1}} + 1$$

Logo, a proposição é verdadeira para $n = k + 1$. Daí, pelo princípio da indução finita, $P(n)$ é verdadeira para todo $n \in \mathbb{N}$, isto é,

$$2^{3^n} + 1 \text{ é divisível por } 3^{n+1} \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

□

Em breve lançaremos cursos para o ENA -2026 e ENQ - 2025.2

Grupo ENA - 2026

Grupo ENQ - 2025.2

Inscrevam-se em nosso canal no youtube através do Qrcod