Paulo Henrique • 17 de março de 2025

1. Pequeno Teorema de Fermat

Suponhamos que já conhecemos as propriedades de congruências lineares.

Teorema 1.
Se $a \in \mathbb{Z}$ e p um número primo com $(a, p) = 1$, então

$$a^{p-1} \equiv 1 \pmod p$$

Exercício 1. Mostre que

a) $a^{16} - b^{16}$ é divisível por 17, para todos os inteiros a e b que são primos com 17.

b) $a^{16} - b^{16}$ é divisível por 85, para todos os inteiros a e b que são primos com 85.

Demonstração. a) De fato, como $(a, 17) = (b, 17) = 1$, então pelo pequeno teorema de Fermat

$$a^{17-1} \equiv 1 \pmod{17} \text{ e } b^{17-1} \equiv 1 \pmod{17}$$

ou seja,

$$a^{16} \equiv 1 \pmod{17} \text{ e } b^{16} \equiv 1 \pmod{17}$$

subtraindo as congruências, vem

$$a^{16} - b^{16} \equiv 1 - 1 \operatorname{mod}(17)$$

logo,

$$a^{16} - b^{16} \equiv 0 \pmod{17}$$

e portanto,

$$17 \mid a^{16} - b^{16}.$$

b)

Queremos mostrar que $a^{16} - b^{16}$ é divisível por 85, para todos os inteiros a e b que são primos com 85.

Como $85 = 5 \times 17$, precisamos mostrar que $a^{16} - b^{16}$ é divisível por 5 e por 17.

Do item (a), sabemos que $a^{16} - b^{16}$ é divisível por 17, para todos os inteiros a e b que são primos com 17.

Por outro lado, Pelo Pequeno Teorema de Fermat,

$$a^{5-1} \equiv a^4 \equiv 1 \pmod 5$$

e

$$b^{5-1} \equiv b^4 \equiv 1 \pmod 5$$

Elevando ambos os lados à quarta potência, vem

$$(a^4)^4 \equiv a^{16} \equiv 1^4 \equiv 1 \pmod 5$$
$$(b^4)^4 \equiv b^{16} \equiv 1^4 \equiv 1 \pmod 5$$

ou equivalentemente,

$$a^{16} \equiv 1 \pmod 5$$

e

$$b^{16} \equiv 1 \pmod 5$$

.

Subtraindo as congruências:

$$a^{16} - b^{16} \equiv 1 - 1 \equiv 0 \pmod 5$$

Isso significa que $a^{16} - b^{16}$ é divisível por 5.

Logo, como $(5, 17) = 1$, então

$$a^{16} - b^{16} \equiv 0 \pmod{5 \times 17}$$

Portanto, $85 \mid (a^{16} - b^{16})$. $\square$

Em breve lançaremos cursos para o ENA -2026 e ENQ - 2025.2

Grupo ENA - 2026

Grupo ENQ - 2025.2

Inscrevam-se em nosso canal no youtube através do Qrcod